

記述問題 (数学)

以下の問1から問4に答えよ。

問1 正の数 a が与えられたとする。座標平面において点 $P(x, y)$ と点 $(0, \frac{a}{2})$ の距離が、点 $P(x, y)$ と直線 $y = -\frac{a}{2}$ との距離に等しいとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $(0, -\frac{1}{2a})$ から (1) で求めた軌跡に接線を 2 本引く。この 2 本の接線と (1) で求めた軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

問2 $\triangle ABC$ において $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 O に対し、 O と各頂点 A, B, C を結ぶ直線が向かい合う辺とそれぞれ P, Q, R で交わるとする。このとき $AR = \frac{c}{3}$ であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $AO = 4OP$ であるとき BP を求めよ。
- (2) $BP = CQ$ であるとき BP を求めよ。

問3 実数 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとし、 O を原点とする座標平面上の 2 点

$$P(3 \cos \theta, 3 \sin \theta), \quad Q(\cos 7\theta, \sin 7\theta)$$

を考える。3 点 O, P, Q が一直線上にある θ の値をすべて求めよ。

問4 自然数 n に対して 3^n の一の位の数 a_n とする。また数列 $\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}$ を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

とする。自然数 m に対して S_{4m} を求めよ。

- (3) 自然数 n に対して $\frac{b_{n+4}}{b_n}$ を求めよ。
- (4) 自然数 m に対して $b_{4m}, b_{4m-1}, b_{4m-2}, b_{4m-3}$ を求めよ。